

4. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 2. 11. 2009

Abgabe: am 10. 11. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Bitte für kein n auf dem gleichen Zettel n und n^* bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4!$

1. Mit einer Variante des Beweises auf Seite 40 1/2 soll gezeigt werden, dass eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Zufallsvariable ist, wenn $\{X \leq a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{E}$ liegt. Die Charakterisierung auf Seite 40 1/2 darf dabei nicht verwendet werden.

1*. Mit einer Variante des Beweises auf Seite 40 1/2 soll gezeigt werden, dass eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Zufallsvariable ist, wenn $\{X \leq a\}$ für alle rationalen $a \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{E}$ liegt. Die Charakterisierung auf Seite 40 1/2 darf dabei nicht verwendet werden.

2. Mit $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch $X \cdot Y$ Zufallsvariable. Hier dürfen die Ergebnisse auf Seite 40 1/2 verwendet werden.

3. $\mathbb{N}_0$ sei mit der Poissonverteilung zum Parameter λ versehen. $X : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch $X(k) := (-1)^k k$ definiert. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X .

4. Bei den neuen ALDI-Computern hat es eine Panne gegeben. Der Zufallsgenerator wirft nicht, wie beabsichtigt, in $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen aus, sondern Zahlen, die gemäß der Dichte $f(x) := 2x$ (auf $[0, 1]$) verteilt sind. Die Computer werden zu einem Spottpreis verkauft. Stellen Sie die random-Funktion durch ein geeignetes Unterprogramm wieder her!

(Genauer heißt das: Sie sollen eine Zufallsvariable $X : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ so finden, dass $\mathbb{P}_X$ die Gleichverteilung auf $[0, 1]$ ist. Falls Sie übrigens während des Beweises eine Funktion g brauchen, für die (für alle x) $g'(x)g(x) = 0.5$ gilt, so versuchen Sie es doch mit $g(x) = \sqrt{x}$.)

4*. Wie vorstehend, aber diesmal verwendet der Computer versehentlich die Dichtefunktion $f(x) = 2010x^{2009}$.

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können.

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulli-verteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? **Neu:** Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? **Neu:** Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig?

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computer-Simulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Binomial, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme).

Neu: Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration.

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... **Neu:** Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis;